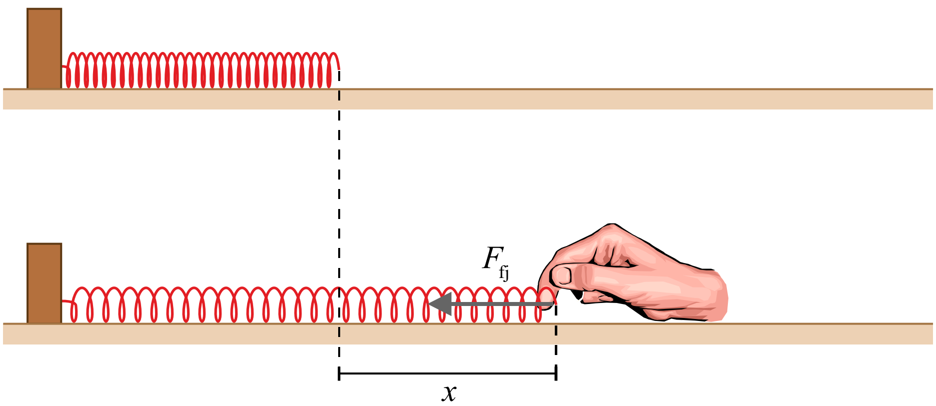
Fjederkræfter og Hookes' lov

På den øverste del af figuren nedenfor er afbildet en *fjeder*, som ligger slapt på et bord, upåvirket af andre kræfter end tyngdekraften og normalkraften fra bordet. Det er ikke overraskende, at det kræver en vis kraft af trække fjederen ud. Trækkraften skal være mindst lige så stor som *fjederkraften* F_{fj}, som virker modsat bevægelsesretningen og som modvirker udstrækningen. Fjederkraften er angivet med en pil på den nederste del af figuren. Fysikeren *Robert Hooke* (1635-1703) opdagede, at mange fjedre adlyder, at den kraft, som skal til for at trække fjederen stykket x ud fra ligevægtspositionen, er proportional med stykket x – hvis altså deformationen ikke er for stor. Vi konstaterer, at der ikke er tale om en egentligt lov, men snarer udsagn om nogle specifikke fjedre. Der findes således fjedre, der ikke adlyder den nævnte sammenhæng. Men "loven" er ofte en brugbar model.

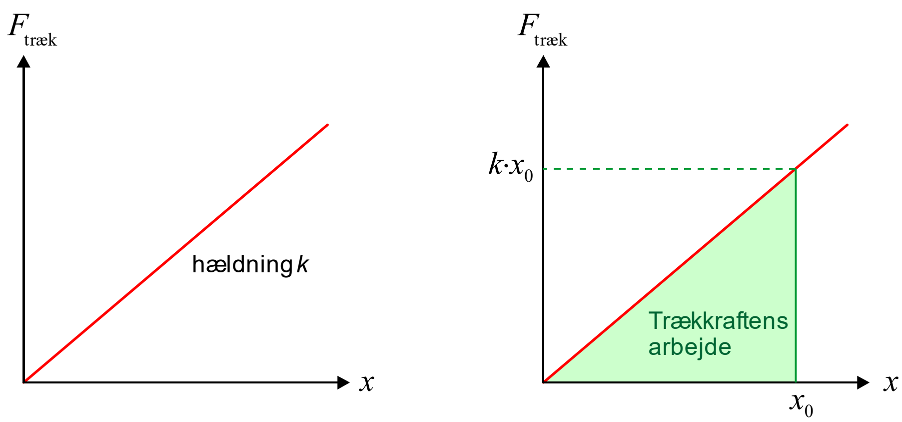
Definition

En fjeder, hvorom der gælder, at fjederkraften er proportional med udstrækningen, altså $F_{\text{fj}} = -k \cdot x$, siges at adlyde *Hookes lov*. Her kaldes k for fjederkonstanten.

Bemærkning: Minusset i Hookes lov skyldes, at fjederkraften virker modsat bevægelsesretningen, hvilket også ses på den nederste delfigur.



Fjederkræfter er eksempler på bevægelse med varierende kraft. I min note *Mekanik* er det side 18 kort omtalt, hvordan man kan bestemme en krafts arbejde, når kraften ikke er konstant. Arbejdet fås løst sagt ved at bestemme arealet under (s, F)-grafen.



Grafen til venstre på forrige side viser trækkraftens størrelse, når fjederen strækkes stykket x ud. Trækkraften er her underforstået at være lig med fjederkraften i størrelse, men rettet modsat. Det er således den mindste kraft, der skal anvendes for at strække fjederen ud. Trækkraften er dermed ensrettet med bevægelsesretningen, hvilket gør, at vinklen mellem kraft og bevægelsesretning er 0. Vi har antaget, at fjederen adlyder Hookes lov. Som indikeret fås arbejdet udført af trækkraften ved at trække fjederen stykket x_0 ud lig med arealet under grafen fra 0 til x_0. Da $F_{\text{træk}}(x) = k \cdot x$, er $F_{\text{træk}}(x_0) = k \cdot x_0$. Som vist på grafen til højre på forrige side, skal vi bestemme arealet af en trekant:

$$\text{Areal} \;=\; \tfrac{1}{2} \cdot h \cdot g \;=\; \tfrac{1}{2} \cdot (k \cdot x_0) \cdot x_0 \;=\; \tfrac{1}{2} \cdot k \cdot x_0^2$$

Dermed har vi trækkraftens arbejde ved at strække fjederen ud fra 0 til x_0:

(1) $$A_{\text{træk}} = \tfrac{1}{2} \cdot k \cdot x_0^2$$

Bemærk, at da fjeder-kraften er lige så stor som trækkraften, men modsat rettet bevægelsen, bliver dens arbejde negativ: $A_{\text{fj}} = -\tfrac{1}{2} \cdot k \cdot x_0^2$. Nu til en definition:

Fjeder potentiel energi

Givet en fjeder, som adlyder Hookes lov. For et objekt, som befinder sig i enden af fjederen, kan man indføre en *fjeder potentiel energi*:

(2) $$E_{\text{pot,fj}} \;=\; \tfrac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

hvor x er fjederens udstrækning og k er fjederkonstanten.

Flere slags potentiel energi

Vi skal undlade at redegøre for, hvorfor ovenstående fjeder potentielle energi er veldefineret. I forvejen kender vi to andre slags potentielle energier. Den bedst kendte potentielle energi er den i tyngdefeltet, nemlig $E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$ for et objekt med massen m, som befinder sig i højden h. Der er også den *elektrisk potentielle energi* $E_{\text{pot,el}} = q \cdot U$ for et objekt med ladning q, som befinder sig i et elektrisk felt med potentialet (spændingen) U. Uanset hvilken type potentiel energi, der er tale om, kan man opfatte det derved, at et objekt, som har en potentiel energi, besidder en slags ”oplagret energi”. Den kan eventuelt frigives eller omdannes til for eksempel kinetisk energi.

Fjedre i industrien

Fjedre bruges i et hav af forskellige produkter fra industrien. Firmaet SODEMANN INDUSTRIFJEDRE A/S lever af at producere fjedre til alverdens formål. Der findes også en lang række forskellige typer af fjedre. Den type, vi underforstår i teorien ovenfor, er en såkaldt *trækfjeder* uden forspænding. Er der en forspænding, skal der anvendes en vis kraft før fjederen overhovedet begynder at ændre længde. Derefter ændrer den længden lineært med kraften. Derudover er der *trykfjedre*, der for eksempel benyttes til støddæmpere i biler. Her skal man bruge en kraft for at trykke den sammen. Andre typer er gasfjedre, bladfjedre, torsionsfjedre etc.

Eksempel 1

Figuren viser en trykfjeder, som kan trykkes ind i et hus. Sætter man et slags projektil for enden af fjederen, kan man bruge konstruktionen til at skyde projektilet afsted langs med bordet. Det oplyses, at fjederen, som har en fjederkonstant på 40 N/m, presses 2,0 cm sammen, og at projektilet vejer 20 gram. Bestem projektilets hastighed v i det øjeblik, hvor det slipper kontakten med fjederen. Fjederen kan betragtes som masseløs.

Løsning: Da hele bevægelsen foregår vandret, behøver vi ikke involvere den potentielle energi i tyngdefeltet. *Start*-situationen er den, hvor projektilet holdes fast mod fjederen, så denne er sammenpresset med 2,0 cm. *Slut*-situationen er den, hvor projektilet forlader fjederen. Fra start til slut-situationen bliver den sammensparede potentielle energi i fjederen omdannet til kinetisk energi for projektilet:

$$\tfrac{1}{2}\cdot k\cdot x^2 = \tfrac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 \quad \Leftrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{k}{m}}\cdot x$$

$$v \;=\; \sqrt{\frac{k}{m}}\cdot x \;=\; \sqrt{\frac{40\ \mathrm{N/m}}{0{,}020\ \mathrm{kg}}}\cdot 0{,}020\ \mathrm{m} \;=\; 1{,}12\ \mathrm{m/s}$$

□

Eksempel 2

Figuren til højre viser en trækfjeder, som hænger ned fra et stativ, dels ubelastet og dels med et lod for enden. Loddets masse er 40 g og fjederkonstanten er 2,4 N/m. Fjederen antages masseløs.

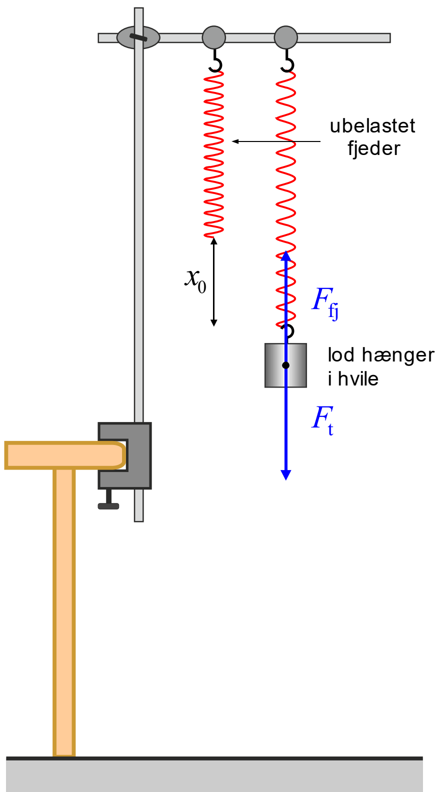
a) Bestem det stykke x_0, som fjederen strækkes ud, når loddet sættes på (hvilepositionen).

Derefter haler vi ned i loddet, så det kommer til at befinde sig 6,0 cm under hvilepositionen. Fra hvile slipper vi så loddet, hvorefter loddet vil begynde at svinge op og ned.

b) Bestem den hastighed v, hvormed loddet vil passere hvilepositionen.

Man kan vise, at loddet vil foretage en *harmonisk svingning* med svingningstid $T = 2\pi\cdot\sqrt{m/k}$.

c) Bestem loddets svingningstid.



Løsninger:

a) Hvilepositionen er karakteriseret ved, at den resulterede kraft på loddet er 0, dvs. at fjederkraftens er lig med tyngdekraften i størrelse:

$$F_{\text{fj}} = F_{\text{t}} \quad \Leftrightarrow \quad k \cdot x_0 = m \cdot g \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = \frac{m \cdot g}{k}$$

$$x_0 \;=\; \frac{m \cdot g}{k} \;=\; \frac{0{,}040\ \text{kg} \cdot 9{,}82\ \text{m/s}^2}{2{,}4\ \text{N/m}} \;=\; 0{,}163\ \text{m}$$

Hvilepositionen er altså 16,4 cm under den slappe fjeder.

b) Vores *start*-situation er situationen, hvor vi har trukket loddet $x = 6\ \text{cm}$ ned og slipper loddet, hvorefter det vil fare opad. *Slut*-situationen er der, hvor loddet passerer den tidligere omtalte hvileposition. Vi skal løse opgaven ved at udnytte energibevarelse. Denne gang er vi nødt til at tage hensyn til den potentielle energi i tyngdefeltet, da den varierer. Som nulpunkt for denne potentielle energi bruger vi hvilepositionens højde, hvilket betyder, at højden i start-situationen bliver $h_0 = -6{,}0\ \text{cm}$. Her vil hastigheden være 0 da loddet slippes fra hvile, og fjederen vil være trukket stykket $x_0 + x$ ud. Vi får følgende udtryk for den mekaniske energi ved start og slut:

$$\begin{aligned} E_{mek,start} &= \tfrac{1}{2} \cdot m \cdot 0^2 + m \cdot g \cdot h_0 + \tfrac{1}{2} \cdot k \cdot (x_0 + x)^2 \\ E_{mek,slut} &= \tfrac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot 0 + \tfrac{1}{2} \cdot k \cdot x_0^2 \end{aligned}$$

Når vi sætter de to energier lig med hinanden og reducerer, bliver det til:

$$m \cdot g \cdot h_0 + \tfrac{1}{2} \cdot k \cdot (x_0 + x)^2 \;=\; \tfrac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \tfrac{1}{2} \cdot k \cdot x_0^2$$

Man kan isolere v heri eller blot anvende *solve* i sit CAS-værktøj. Vi får:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{2 \cdot g \cdot h_0 + \frac{k}{m} \cdot \left((x_0 + x)^2 - x_0^2 \right)} \\ &= \sqrt{2 \cdot 9{,}82\ \text{m/s}^2 \cdot (-0{,}060\ \text{m}) + \frac{2{,}4\ \text{N/m}}{0{,}040\ \text{kg}} \cdot \left((0{,}1637\ \text{m} + (-0{,}060\ \text{m}))^2 - (-0{,}060\ \text{m})^2 \right)} \\ &= 0{,}46\ \text{m/s} \end{aligned}$$

Loddet passerer altså hvilepositionen med en hastighed på 46 m/s.

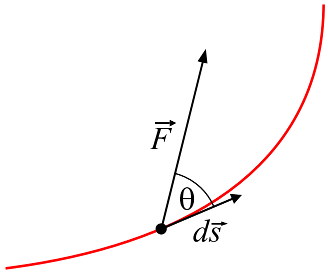
c) Vi bruger formlen for svingningstiden:

$$T \;=\; 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \;=\; 2\pi \cdot \sqrt{\frac{0{,}040\ \text{kg}}{2{,}4\ \text{N/m}}} \;=\; 0{,}81\ \text{s}$$

Så en svingning tager 0,81 s.

□

Generelt om en krafts arbejde - Avanceret



I et mere generelt setup, hvor man har en varierende kraft og måske endda en bevægelse, som foregår langs en kurve *C*, kan kraftens arbejde defineres som følgende integral:

(3) $$A = \int_C dA = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt$$

hvor det differentielle arbejde $dA = \vec{F} \cdot d\vec{s}$ er et skalarprodukt mellem kraft-vektoren $\vec{F}$ og det differentielle kurveelement $d\vec{s}$. Den elegante definition via skalarproduktet ses at give den velkendte cosinusfaktor på formlen for en krafts arbejde: $\vec{F} \cdot d\vec{s} = F \cdot ds \cdot \cos(\theta)$.

Formlen (3) viser også, hvordan man kan udregne integralet, hvis positionen er parametriseret ved tiden *t*. I tilfældet med trækkraftens arbejde, når der trækkes ud i en fjeder, kan vi dog bruge *x* direkte som parameter. Da trækkraften under hele bevægelsen er ensrettet med bevægelsesretningen, haves $\theta = 0$, hvorved man får:

$$A_{\text{træk}} = \int_0^{x_0} k \cdot x\, dx = \left[k \cdot \tfrac{1}{2} x^2 \right]_0^{x_0} = \tfrac{1}{2} k \cdot x_0^2$$

hvilket er i overensstemmelse med (1) udledt ved hjælp af arealer.

□